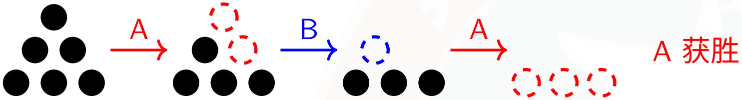
抓石子游戏中的数学问题

张神星 (合肥工业大学)
北京理工大学
zhangshenxing@hfut.edu.cn

- Alice 和Bob 在玩一个游戏, 他们从地上抓起一把石子, 然后从 Alice 开始, 轮流从石子堆中取走石子.
- 每个人每次可以取走 $1\sim 3$ 个石子, 最终谁把最后一颗石子取走, 谁就获得了游戏的胜利.



- 如果一开始石子的个数是 4 的倍数. 那么每次 A 取 x 个之后, B 只需要取 $4-x$ 个, 就可以保证必胜.
- 如果一开始石子的个数不是 4 的倍数, 那么 A 只需要取 $1\sim 3$ 个石子, 使得剩下的石子个数是 4 的倍数即可获胜.

必胜条件

- 可以看出, 只要 A 能将游戏状态变成后手必胜, 那么原来的游戏就是先手必胜.
- 如果无论 A 怎么操作, 都不能将游戏变成先手必胜, 那么这个游戏就是后手必胜的.
- 如果初始有 n 个石子, 令

$$\mathcal{P}(n) = \begin{cases} 1, & \text{先手必胜;} \\ 0, & \text{后手必胜.} \end{cases}$$

- 那么

$$\mathcal{P}(n) = 1 - \mathcal{P}(n-1)\mathcal{P}(n-2)\mathcal{P}(n-3) = \begin{cases} 1, & 4 \nmid n; \\ 0, & 4 \mid n. \end{cases}$$

- 这个序列 $(n \geqslant 0)$ 形如:

$$0111\ 0111\ 0111\ \cdots$$

必胜点

- 我们将这个游戏记为 $\textsc{sub}(S)$, 其中 $S \subset \mathbb{N}$ 表示每次可以取的石头个数.
- 由于有可能最后剩下的石子数量比 S 中的最小元还要小, 所以我们将游戏规则改成**谁不能取谁算输**更为合理.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	2	3	0	1	2	3	0
级必胜点	级必胜点	级必胜点	级必胜点	级必胜点	级必胜点	级必胜点	级必胜点	级必胜点

可以变成 $0 \sim m-1$ 级必胜点的点, 叫做 m 级必胜点.

Sprague-Grundy 序列

- 如果 n 个石子情形是 m 级必胜点, 定义 $\mathcal{G}_S(n) = m$, 并称该序列为 **Sprague-Grundy 序列** (或 Nim 序列). 那么

$$\mathcal{G}_S(n) = \mathrm{mex}\{\mathcal{G}_S(n-s) : s \in S\},$$

mex 是指不属于后面集合的最小的非负整数 (minimal except).

实际上 Nim 游戏 (抓石子游戏) 有相当多的变种, 例如

- 有多个石子堆;
- 有无穷多种取法 (S 无限);
- 高维情形 (n 是向量, S 是向量集合) 等等.

subtraction game

我们今天只讨论 S 有限的一维一堆情形.

注意到 $\mathcal{G}_{dS}(n) = \mathcal{G}_S([\frac{n}{d}])$. 因此我们只需考虑 S 的所有元素公因子为 1 的情形.

周期和预周期

- 我们将集合 S 中的元素从小到大排列, 即

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}, \quad s_1 < s_2 < \cdots < s_k.$$

- 那么 $\mathcal{G}(n) \leqslant k$. 于是 S-G 序列中连续 s_k 项形成的序列只有 $(k+1)^{s_k}$ 种可能, 从而由抽屉原理可知, 存在两个相同的 s_k 项序列. 而 $\mathcal{G}(n)$ 仅由它之前的 s_k 项决定, 所以我们得到:

命题

ultimately periodic

序列 $\mathcal{G}$ 是最终周期的, 即存在整数 $p \geqslant 1, \ell \geqslant 0$ 使得 $\mathcal{G}(n+p) = \mathcal{G}(n), \forall n \geqslant \ell$.

- 将最小的 p 称为 ($\mathcal{G}_S$ 或 $\textsc{sub}(S)$ 的)周期 (period), 最小的 ℓ 称为预周期 (pre-period).

- 于是
$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(0)\mathcal{G}(1)\mathcal{G}(2)\cdots = \mathcal{G}(0)\cdots\mathcal{G}(\ell-1)\underline{\mathcal{G}(\ell)\cdots\mathcal{G}(\ell+p-1)}.$$
这里 $\underline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\mathcal{H}\cdots$ 表示无穷多个 $\mathcal{H}$ 重复得到的序列.
- 不难说明, 满足 $\mathcal{G}(n) = \mathcal{G}(n+p), \ell \leqslant \forall n \leqslant \ell + s_k$ 的最小的 p 和 ℓ 就是周期和预周期.
- 因此对于任意集合 S, 很容易通过计算机来计算它的周期和预周期, 从而得到整个 S-G 序列.
- 显然 $p, \ell \leqslant (k+1)^{s_k}$.

当 $k=\#S\leqslant 2$ 时, p 和 ℓ 都是已知的. 而即使是 $k=3$ 的情形, p 和 ℓ 依然还不是完全知道. 我们将回顾已知的并给出一些新的结果.

- $\mathcal{G}_{\{1\}}=\underline{01}$.
- $1\in S$ 不含偶数 $\iff$ $\mathcal{G}_S=\underline{01}$.
- 事实上, 如果 $S'=S\cup\{x+pt\}$, 其中 $x\in S,p$ 是 $\mathcal{G}_S$ 周期, 则 $\mathcal{G}_{S'}=\mathcal{G}_S$.
- 设 $S=\{a,c=at+r\},0\leqslant r<a$, 则

$$\mathcal{G}_S=\begin{cases}\underline{(0^a1^a)^{t/2}0^r2^{a-r}1^r}, & 2\mid t;\\ \underline{(0^a1^a)^{(t+1)/2}2^r}, & 2\nmid t,\end{cases}\quad \ell=0,p=c+a \text{ 或 } 2a.$$

这里 $\mathcal{H}^t=\mathcal{H}\cdots\mathcal{H}$ 表示 t 个 $\mathcal{H}$ 重复得到的序列. 注意 $2\nmid t$ 时这里未必是最小循环节.

例

设 $S = \{1, b, c\}, 2 \nmid b$. 注意到 $\mathcal{G}_{\{1,b\}} = \mathcal{H}, \mathcal{H} = 01$. 我们有

c	$\mathcal{G}_S$	ℓ	p
奇数	$\mathcal{H}$	0	2
偶数	$\mathcal{H}^{c/2}(23)^{(b-1)/2}2$	0	$c+b$

例

设 $S = \{1, 2, 3t + r\}, 0 \leqslant r < 3$. 注意到 $\mathcal{G}_{\{1,2\}} = \underline{\mathcal{H}}, \mathcal{H} = 012$. 我们有

r	$\mathcal{G}_S$	ℓ	p
0	$\underline{(012)^t 3}$	0	$c + 1$
1, 2	$\underline{012}$	0	3

例

设 $S = \{1, 4, c = 5t + r\}, 0 \leqslant r < 5$. 注意到 $\mathcal{G}_{\{1,4\}} = \underline{\mathcal{H}}, \mathcal{H} = 01012$. 我们有

r, c	$\mathcal{G}_S$	ℓ	p
$r = 0, c = 5$	$\underline{\mathcal{H}\,323}$	0	8
$r = 0, c > 5$	$\mathcal{H}^t\,323013\underline{\mathcal{H}^{t-1}012012}$	$c + 6$	$c + 1$
$r = 1, 4$	$\underline{\mathcal{H}}$	0	5
$r = 2$	$\underline{\mathcal{H}^t\,012}$	0	$c + 1$
$r = 3$	$\underline{\mathcal{H}^{t+1}\,32}$	0	$c + 4$

命题

设 $S=\{1,b,c\}$, 其中 $b\geqslant 6$ 是偶数, $c=t(b+1)+r, 0\leqslant r\leqslant b$. 我们有

	r	ℓ	p
	$1, b$	0	$b+1$
	$[3, b-1]$ 是奇数	0	$c+b$
	$b-2$	0	$c+1$
	$c=b+1$	0	$2b$
$c>b+1$, $r\leqslant b-4$ 偶	$r>b-2t-2$	$(\frac{b-r}{2}-1)(c+b+2)-b$	$c+1$
	$r=b-2t-2$	$t(c+b+2)-b$	$b-1$
	$r<b-2t-2$	$t(c+b+2)-b$	$c+b$

- 可以看出在带 1 的三元集情形, p 和 ℓ 的形式与 c 模 $\{1,b\}$ 的周期的同余类有关.
- 除去有限多种情形外, c 在每一个同余类中, p 和 ℓ 是 c 的一次函数.

该情形 $\mathcal{G}$ 序列较为复杂. 例如: 若 $0<r=2v<b-2t-2$, $b=2k$, 则

i	$\mathcal{G}((c+1)i+j), 0\leqslant j\leqslant c$
0	$\mathcal{H}^t\,(01)^v 2$
1	$(32)^{k-v-1}(01)^{v+1}2, \mathcal{H}^{t-1}(01)^v 0$
2	$1(01)^{k-v-2}2(01)^{v+1}2, (32)^{k-v-2}(01)^{v+2}2, \mathcal{H}^{t-2}(01)^v 0$
i	$1(01)^{k-v-2}2(01)^{v+1}0, \ldots, 1(01)^{k-v-i+1}2(01)^{v+i-2}0,$ $1(01)^{k-v-i}2(01)^{v+i-1}2, (32)^{k-v-i}(01)^{v+i}2, \mathcal{H}^{t-i}(01)^v 0$
$t-1$	$1(01)^{k-v-2}2(01)^{v+1}0, \ldots, 1(01)^{k-v-t+2}2(01)^{v+t-3}0,$ $1(01)^{k-v-t+1}2(01)^{v+t-2}2, (32)^{k-v-t+1}(01)^{v+t-1}2, \mathcal{H}^1(01)^v 0$
t	$1(01)^{k-v-2}2(01)^{v+1}0, \ldots, 1(01)^{k-v-t+1}2(01)^{v+t-2}0,$ $1(01)^{k-v-t}2(01)^{v+t-1}2, (32)^{k-v-t}(01)^{v+t}2, (01)^v 0$
$t+1$	$1(01)^{k-v-2}2(01)^{v+1}0, \ldots, 1(01)^{k-v-t+1}2(01)^{v+t-2}0,$ $1(01)^{k-v-t}2(01)^{v+t-1}0, 1(01)^{k-v-t-1}2(01)^{v+t}2, (32)^{k-v-t-1}01\cdots$

命题

设 $S=\{a,2a,c=3at+r\},0\leqslant r<3a$，则

$$\ell=\begin{cases}c+a-r, & 0<r<a;\\ 0, & \text{其它情形},\end{cases}\qquad p=\begin{cases}3a/2, & r=a/2;\\ 3a, & a/2<r\leqslant 2a;\\ c+a, & \text{其它情形}.\end{cases}$$

命题

设 $S=\{a,a+1,\ldots,b-1,b,c=t(a+b)+r\},0\leqslant r<a+b$，则

$$\ell=0,\qquad p=\begin{cases}a+b, & a\leqslant r\leqslant b;\\ c+a, & r=0\ \text{或} r>b;\\ c+b, & 0<r<a.\end{cases}$$

五元集合的例子

例

设 $S=\{2,3,5,7\}$, 则 $\mathcal{G}_S=0^21^22^23^24$ 周期为 9. 对于 $11\leqslant c\leqslant 500$, $\textsc{sub}(S\cup\{c\})$ 的预周期和周期为

$$\ell_c=\begin{cases}2c-4, & c\equiv 1 \bmod 18;\\ c+5, & c\equiv 10 \bmod 18;\\ 0, & \text{其它情形},\end{cases}\qquad p_c=\begin{cases}c+2, & c\equiv 0,8,9,10,17 \bmod 18;\\ 4, & c\equiv 1 \bmod 18;\\ 9, & \text{其它情形}.\end{cases}$$

根据这些结论，我们猜想 $\text{SUB}(S\cup\{c\})$ 周期和预周期关于 c 是**最终逐剩余类线性**的:

猜想

固定集合 S. 存在正整数 q, N 以及 $\alpha_r, \beta_r, \lambda_r, \mu_r, 0 \leqslant r < q$, 使得当 $c \geqslant N$ 且 $c \equiv r \bmod q$ 时, $\text{SUB}(S\cup\{c\})$ 的预周期和周期分别是 $\alpha_r c + \beta_r$ 和 $\lambda_r c + \mu_r$.

定理

上述猜想在如下情形成立:

(1) $1 \in S$ 且 S 所有元素均为奇数;

(2) $S = \{1, b\}$;

(3) $S = \{a, 2a\}$;

(4) $S = \{a, a+1, \ldots, b-1, b\}$.

这个猜想可以指导我们寻找特定周期的 S-G 序列. 如果 $\mathcal{G}_S$ 的周期为 2, 称 $\textsc{sub}(S)$ 是**最终二分**的. 可以证明如果 $\textsc{sub}(S)$ 是最终二分的, 则 S 不含偶数.

ultimately bipartite

例

设 $a \geqslant 3$ 是奇数. 如果 S 是如下情形之一:

- $S = \{3, 5, 9, \dots, 2^a + 1\}$;
- $S = \{3, 5, 2^a + 1\}$;
- $S = \{a, a + 2, 2a + 3\}$;
- $S = \{a, 2a + 1, 3a\}$,

则 $\textsc{sub}(S)$ 是最终二分的.

根据上面的例子和猜想的启发，我们发现了如下三元最终二分 $\textsc{sub}(S)$.

定理

设 $a \geqslant 3$ 是奇数，$t \geqslant 1$. 如果 S 是如下情形之一：

(1) $S = \{a, a+2, (2a+2)t+1\}$； (来自 $\{a, a+2, 2a+3\}$)

(2) $S = \{a, 2a+1, (3a+1)t-1\}$； (来自 $\{a, 2a+1, 3a\}$)

(3) $S = \{a, 2a-1, (3a-1)t+a-2\}$， (来自 $\{a, a+2, 2a+3\}$)

则 $\textsc{sub}(S)$ 是最终二分的.

应用：最终二分序列

例如情形 (1) 的 G-S 序列开头为 $(a=2k+1)$:

i	$\mathcal{G}\big((a+1)(2t+1)i+j\big), 0 \leqslant j < (a+1)(2t+1) = c+a$						
0	$0^a 1$	$[$	$1^{a-1}22$	$0^a 1$	$]^{t-1}$	$1^{a-1}22$	$02^{a-3}331$
1	$030^{a-2}1$	$[$	$01^{a-2}21$	$020^{a-2}1$	$]^{t-1}$	$01^{a-2}21$	$0202^{a-5}321$
i	$(01)^{i-1}030^{a-2i}1$	$[$	$(01)^{i-1}01^{a-2i}21$	$(01)^{i-1}020^{a-2i}1$	$]^{t-1}$	$(01)^{i-1}01^{a-2i}21$	$(01)^{i-1}0202^{a-2i-3}321$
$k-1$	$(01)^{k-2}030^3 1$	$[$	$(01)^{k-2}01^3 21$	$(01)^{k-2}020^3 1$	$]^{t-1}$	$(01)^{k-2}01^3 21$	$(01)^{k-2}020321$
k	$(01)^{k-1}0301$	$[$	$(01)^{k-1}0121$	$(01)^{k-1}0301$	$]^{t-1}$	$(01)^{k-1}0101$	$(01)^{k-1}0101$

謝謝